Solution 17 :

1°/ $7u + 9v = 3 \Leftrightarrow 7(u-3) = 9(v-2)$

9 divise $7(u-3)$ or $9 \wedge 7 = 1$

d'où d'après le lemme de Gausse 9 divise $(u-3)$

et par suite $u-3 = 9k$ où $k \in \mathbb{Z}$

donc $\underline{u = 3 + 9k}$

$$\begin{cases} 9(v-2) = 7(u-3) \\ u = 3 + 9k \end{cases} \Rightarrow \quad 9(v-2) = 7(9k)$$

d'où $v = 2 + 7k$

$S_{\mathbb{Z}^2} = \{ (3 + 9k , 2 + 7k) \text{ où } k \in \mathbb{Z} \}$

2°/ $\begin{cases} A = 74 + 2 \\ A = 9v + 5 \end{cases}$ d'où $7u + 2 = 9v + 5$

$$7u - 9V = 3$$

or d'après 1°/ $u = 3 + 9k$

$$v = 2 + 7k$$

$A = 7(3+9k) + 2 = 21 + 63k + 2 = 63k + 23$

Le reste de la division euclidienne de A par 63 est 23.

b°/ on a : $\begin{cases} 1920 < A < 2030 \\ A = 63k + 23, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

d'où : $1920 < 63k + 23 < 2030 \Rightarrow 1897 < 63k < 2007$

$$\Rightarrow \frac{1897}{63} < k < \frac{2007}{63} \Rightarrow 30{,}11 < k < 31{,}86$$

et comme $k \in \mathbb{Z}$ alors $k = 31$

conclusion : $A = 63 \times 31 + 23 \qquad A = 1976$

c) $A^n \equiv 1 \pmod 9 \Leftrightarrow 1976^n \equiv 1 \pmod 9$